

Ștefan Smărândoiu

Marius Perianu

Cătălin Stănică

Matematică

Clasa a VI-a

II



Algebră

I. Mulțimea numerelor întregi

I.1.	Număr întreg	8
I.2.	Compararea și ordonarea numerelor întregi	13
I.3.	Adunarea numerelor întregi	17
I.4.	Scăderea numerelor întregi	24
	Teste de evaluare	29
	Fișă pentru portofoliul individual (A1)	31
I.5.	Înmulțirea numerelor întregi	33
I.6.	Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului ...	39
I.7.	Puterea cu exponent natural a unui număr întreg nenul	44
I.8.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	48
	Teste de evaluare	51
	Fișă pentru portofoliul individual (A2)	53
I.9.	Rezolvarea unor ecuații în $\mathbb{Z}$	55
I.10.	Rezolvarea unor inecuații în $\mathbb{Z}$	59
I.11.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau al inecuațiilor	62
	Teste de evaluare	65
	Fișă pentru portofoliul individual (A3)	67
	Test-model pentru Evaluarea Națională	69

II. Mulțimea numerelor raționale

II.1.	Mulțimea numerelor raționale. Forme de scriere a numerelor raționale	74
II.2.	Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor. Compararea și ordonarea numerelor raționale	81
	Teste de evaluare	87
	Fișă pentru portofoliul individual (A4)	89
II.3.	Adunarea și scăderea numerelor raționale	91
II.4.	Înmulțirea și împărțirea numerelor raționale	98
II.5.	Puterea cu exponent întreg a unui număr rațional	105
II.6.	Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale	111
	Teste de evaluare	117
	Fișă pentru portofoliul individual (A5)	119
II.7.	Ecuații în mulțimea numerelor raționale	121

II.8.	Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	126
	Teste de evaluare	131
	Fișă pentru portofoliul individual (A6)	133
	Test-model pentru Evaluarea Națională	135
II.9.	Probleme cu caracter practic	137
II.10.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	139

Geometrie

III. Linii importante în triunghi

III.1.	Bisectoarea	144
III.2.	Mediatoarea	148
	Teste de evaluare	153
	Fișă pentru portofoliul individual (G1)	155
III.3.	Înălțimea	157
III.4.	Mediana	160
	Teste de evaluare	163
	Fișă pentru portofoliul individual (G2)	165
	Test-model pentru Evaluarea Națională	167
III.5.	Probleme pentru performanță școlară și olimpiade	169

IV. Proprietățile triunghiurilor

IV.1.	Proprietățile triunghiului isoscel	172
	Teste de evaluare	181
	Fișă pentru portofoliul individual (G3)	183
IV.2.	Proprietățile triunghiului echilateral	185
	Teste de evaluare	189
	Fișă pentru portofoliul individual (G4)	191
IV.3.	Proprietățile triunghiului dreptunghic	193
	Teste de evaluare	199
	Fișă pentru portofoliul individual (G5)	201
	Test-model pentru Evaluarea Națională	203
IV.4.	Relații între laturi și unghiuri (extindere)	205
	Recapitularea și consolidarea cunoștințelor	208

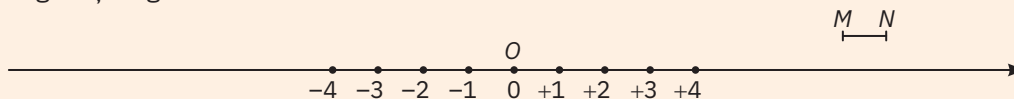
V. Variante de subiecte pentru evaluarea sumativă

	Varianta 1	214
	Varianta 2	215
	Varianta 3	216
	Varianta 4	217
	Varianta 5	218

Varianta 6		219
Varianta 7		220
Varianta 8		221
Varianta 9		222
Varianta 10		223
Soluții		225

I.1. Număr întreg

Mulțimea numerelor întregi. Pe axa numerelor din reprezentarea de mai jos s-au ales punctul O ca origine și segmentul MN ca unitate de măsură.



Începând de la punctul O , spre dreapta, măsurăm una, două, trei, patru unități. În dreptul punctelor obținute scriem $+1, +2, +3, +4$. Numerele $+1, +2, +3, +4$ și toate celelalte pe care le putem obține în același mod se numesc *numere întregi pozitive*.

Începând de la punctul O , spre stânga, măsurăm una, două, trei, patru unități. În dreptul punctelor scriem $-1, -2, -3, -4$. Numerele $-1, -2, -3, -4$ și toate celelalte obținute măsurând unități spre stânga se numesc *numere întregi negative*.

Numerele întregi pozitive, numerele întregi negative și numărul 0 formează *mulțimea numerelor întregi*, care se notează cu simbolul $\mathbb{Z}$. Avem:

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots \} \quad \text{sau} \quad \mathbb{Z} = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots \}.$$

Alte notații: $\mathbb{Z}_+ = \{ +1, +2, \dots, +n, \dots \}$ – mulțimea numerelor întregi pozitive;
 $\mathbb{Z}_- = \{ -1, -2, \dots, -n, \dots \}$ – mulțimea numerelor întregi negative;
 $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}$ – mulțimea numerelor întregi nenule.

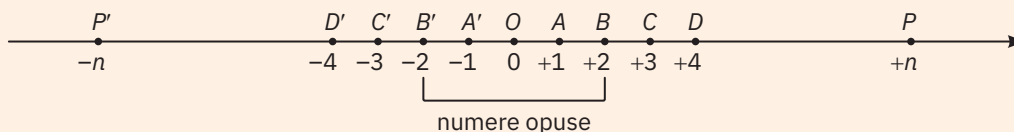
Observații

- 1 Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale: $1 = +1, 2 = +2, 3 = +3, 4 = +4$ etc.; altfel spus, avem egalitatea $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}^*$.
- 2 Numărul 0 nu este nici pozitiv și nici negativ.

Exemple: Numerele întregi negative sunt folosite pentru a descrie temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheț, adâncimi sub nivelul mării, datorii etc.

- 1 Într-o zi de iarnă, temperatura poate fi egală cu -10°C .
- 2 Altitudinea Everestului este de 8848 m, iar adâncimea maximă a Oceanului Atlantic este de 8385 m. Raportate la nivelul mării, care este considerat a fi 0 m, aceste valori pot fi exprimate astfel: altitudinea este de $+8848$ m, iar adâncimea de -8385 m.
- 3 Soldul unei societăți comerciale se obține însumând încasările (*creditul*), reprezentate prin numere pozitive, și plățile (*debitul*) reprezentate prin numere negative. De exemplu, dacă într-o zi încasările au fost de 3000 de lei, dar s-a plătit o factură de 4000 de lei, atunci în ziua respectivă soldul este negativ (-1000), deoarece societatea are o *datorie* de 1000 de lei.

Opusul unui număr întreg. Pe axă există puncte egal depărtate de origine. De exemplu, în reprezentarea de mai jos: A și A' , B și B' etc.



Două numere întregi nenule se numesc *opuse* dacă le corespund pe axă două puncte ce sunt egal depărtate de O .

Exemple

1 Numerele 2 și -2 sunt opuse.

2 Numărul -4 este opusul numărului $+4$.

Observații:

1 În general, dacă n este un număr natural nenul, atunci:

- opusul numărului întreg pozitiv $+n$ este numărul întreg negativ $-n$;
- opusul numărului întreg negativ $-n$ este numărul întreg pozitiv $+n$.

2 Opusul numărului 0 este tot numărul 0, deoarece $+0 = -0 = 0$.

3 Opusul unui număr întreg x (fie pozitiv, fie negativ) se notează cu $-x$.

Exemple

1 Opusul numărului -7 se notează cu $-(-7)$ și este egal cu $+7$, deci $-(-7) = +7$.

2 Opusul numărului $+5$ se notează cu $-(+5)$ și este egal cu -5 , deci $-(+5) = -5$.

Valoarea absolută sau *modulul* unui număr întreg a este distanța de la origine la punctul ce îi corespunde numărului a pe axa numerelor. Se notează cu $|a|$.

Exemple

1 În reprezentarea anterioară, numărului $+3$ îi corespunde punctul C .
 $|+3| = 3$, deoarece $d(O, C) = OC = 3u$, unde $u = MN$.

2 În reprezentarea anterioară, numărului -4 îi corespunde punctul D' .
 $|-4| = 4$, deoarece $d(O, D') = OD' = 4u$.

Observații. Fie n un număr natural nenul. Atunci:

- 1 Modulul numărului întreg pozitiv n este egal cu numărul însuși: $|n| = n$.
- 2 Modulul numărului întreg negativ $-n$ este egal cu opusul său: $|-n| = -(-n) = +n$.
- 3 Modulul numărului întreg 0 este tot 0: $|0| = 0$.
- 4 $|a| \geq 0$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}$, cu egalitate pentru $a = 0$.
- 5 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Z}$.

Exemple: a $|+3| = 3$;

b $|-4| = 4$;

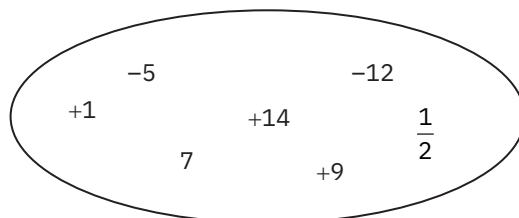
c $|0| = 0$.

Exersare

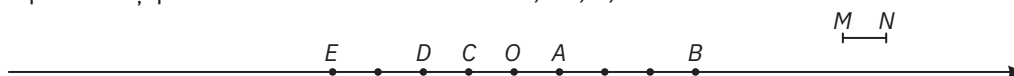


- 1 Asociați fiecărui număr din propozițiile următoare unul dintre simbolurile $+$ sau $-$:
 - a Elena are o datorie de 25 000 de lei.
 - b Înălțimea ușii este de 210 cm.
 - c Astăzi sunt 5°C sub zero.
 - d Un scufundător a ajuns la o adâncime de 105 m sub nivelul mării.
- 2 Fie mulțimea $A = \{-2, 5, +4, 3, -1, 0, -4, +9\}$.
 - a Enumerați elementele mulțimii A ce sunt numere naturale.
 - b Reprezentați, folosind o diagramă Venn-Euler, acea submulțime a mulțimii A ce conține doar numere întregi negative.

- 3 Subliniați numerele întregi negative din șirul: $-4, +3, 2, 7, 12, 0, -5, -24, +35$.
- 4 Precizați care dintre propozițiile următoare sunt adevărate și care sunt false:
- a „8 este un număr întreg”; b „-2 este un număr natural”;
 c „0 este un număr întreg pozitiv”; d „ $+9 \in \mathbb{Z}$ ”; e „ $-5 \in \mathbb{N}$ ”; f „ $-5 \in \mathbb{Z}$ ”.
- 5 Enumerați elementele mulțimii M care sunt numere naturale, din diagramă:



- 6 Care este coordonata punctului de origine a axei numerelor?
- 7 Reprezentați pe axa numerelor următoarele numere întregi:
 a $-3, 2, -1, -5, 4$; b $-2, +2, -3, -4, +1$; c $+6, -1, -3, +2, -4$.
- 8 Ce numere sunt reprezentate pe o axă la distanța de opt unități față de origine?
- 9 În reprezentarea următoare, punctul O este originea axei.
 a Completați reprezentarea următoare cu coordonatele punctelor A, B, C, D și E .
 b Reprezentați punctele ce au coordonatele $-6, -8, 5, +9$.



- 10 a Reprezentați, pe o axă ce are ca unitate de măsură 1 cm, punctele ce corespund numerelor $-12, 5, -3, -7, +4, 2, +10, -5, 3$. Stabiliți dacă între acestea există și puncte ce sunt egal depărtate de origine.
- b Completați tabelul:

a	-7	11	$-(-3)$	29	$17 - 5$	-22	$+6$	-20	-5
$ a $									

- 11 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
- a Opusul numărului $+5$ este b Opusul numărului 0 este numărul
 c Opusul numărului -8 este d Opusul numărului este egal cu 9.
 e Opusul numărului este egal cu -52 . f $-(-56) = \dots$
 g $-(+43) = \dots$ h $-(\dots) = 23$. i $-(\dots) = -19$.

Consolidare



- 12 Reprezentați pe axa numerelor toate punctele ce au distanța față de origine egală cu 2, 4, 5 și 8. Enumerați coordonatele punctelor și precizați, pentru fiecare dintre acestea, valoarea absolută.
- 13 Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.
 a Modulul numărului -11 este egal cu

b Valoarea absolută a numărului $+7$ este egală cu

c $|+11| = \dots\dots$

d $|+2012| = \dots\dots$

e $|-1| = \dots\dots$

f $|-2| = \dots\dots$

14 Calculați:

a $|+8| + |-5| - |-9|$;

b $|-15| + |-3| \cdot |+6|$;

c $|-25| \cdot |-3| - |-60|$;

d $|-7| \cdot |-2| + |-24| : |-6|$;

e $|-28| : |+2| - |16| : |-4|$;

f $|+64| : |4| + 0 : |-8|$.

15 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $\{-2, -1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$;

b $\{-1, 0, 1, 2\} \subset \mathbb{N}$;

c $\{0, 1, 2, \dots, 2020\} \subset \mathbb{N}$;

d $\{-2020, -2019, \dots, 2019, 2020\} \subset \mathbb{Z}$.

16 Fie mulțimea $M = \left\{ +8; \frac{5}{2}; -4; +4; 0,75; -41; -(-10); 0 \right\}$. Enumerați elementele mulțimilor $M \cap \mathbb{N}$ și $M \cap \mathbb{Z}$.

17 Scrieți câte trei elemente aparținând fiecăreia dintre mulțimile de mai jos:

a $\mathbb{Z}$;

b $\mathbb{N}$;

c $\mathbb{Z}_+$;

d $\mathbb{Z}_-$;

e $\mathbb{Z} - \mathbb{N}$;

f $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}$.

18 Câte elemente are mulțimea $\mathbb{N} - \mathbb{Z}$? Dar $\mathbb{N} - \mathbb{Z}_+$?

19 Arătați, dând câte un contraexemplu, că propozițiile următoare sunt false:

a $\mathbb{N} = \mathbb{Z}$;

b $\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$;

c $\mathbb{Z}_- \cup \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$;

d $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

20 Reprezentați pe o axă ce are ca unitate de măsură un centimetru, punctele A , B , C și D de coordonate -6 , $+6$, -8 , și, respectiv, $+9$. Determinați distanțele dintre:

a A și B ;

b B și C ;

c D și A .

21 Stabiliți dacă enunțurile următoare sunt adevărate pentru orice numere întregi, pentru câteva numere întregi sau nu sunt adevărate pentru niciun număr întreg.

a Valoarea absolută a unui număr întreg este negativă.

b Numerele opuse au aceeași valoare absolută.

22 Numerele întregi care au valoarea absolută egală cu 2 sunt:

a 2 și 4

b -2 și 4

c 2 și -4

d -2 și 2.

23 Reprezentați pe axă toate numerele întregi ce au modulul cel mult egal cu 6.

24 Pe o axă ce are ca unitate de măsură 1 cm, reprezentați punctele A și B , astfel alese încât unul să aibă coordonata număr întreg pozitiv, celălalt să aibă coordonata număr întreg negativ și distanța dintre cele două puncte să fie egală cu 5 cm. Determinați toate soluțiile. Dacă punctelor le corespund numerele a și b , calculați $|a| + |b|$.

25 Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:

a $|x| = 2$;

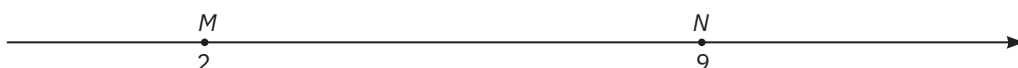
b $|x| = 10$;

c $|x| = -6$;

d $|x| \in \{3, 4, 5\}$.

26 Ce numere întregi verifică egalitatea $|x| = x$? Dar egalitatea $|x| = -x$?

27 Găsiți toate pozițiile posibile pentru punctele M și N din reprezentarea de mai jos, dacă punctul M este traslatat cu cinci unități, iar punctul N cu două unități. Pentru fiecare situație în parte determinați distanța dintre M și N .





- 28** Pe o axă de coordonate cu originea în O se consideră punctele M, N având abscisele -8 , respectiv 16 , și Q ales astfel încât $OQ = 6$. Determinați lungimile segmentelor OM, ON, QM, QN .
- 29** Pe o axă de coordonate cu unitatea de măsură egală cu 1 cm se consideră punctele A și B , astfel încât $AB = 12$ cm și coordonata punctului A să fie egală cu -5 .
- a** Determinați coordonata punctului B .
- b** Determinați coordonatele punctelor M și N , știind că $AM = 4$ cm și $AN = 6$ cm. Câte situații apar? Calculați de fiecare dată lungimea segmentului MN .
- 30** Determinați coordonatele punctelor M și N ce aparțin axei numerelor, știind că abscisele acestora sunt numere opuse și $MN + 4MO = 18$.
- 31 a** Reprezentați pe axa numerelor punctele A și B , astfel încât $d(A; O) = 7u$ și $d(B; O) = 8u$, unde O indică originea pe axă.
- b** Dacă $A(a)$ și $B(b)$, determinați, pentru fiecare caz, $a, b, |a|, |b|$.
- 32** Pe axa numerelor, abscisele punctelor M, N și P sunt numerele întregi x, y și, respectiv, z , care verifică relațiile $|x| = 6$ și $|y| = 4$. Știind că $NP = 3$, calculați lungimile segmentelor OM, ON, OP, MN, MP, NP .
- 33** Calculați:
- a** $|-1| + |-2| + |-3| + \dots + |-64|$; **b** $|-2| + |4| + |-6| + \dots + |-102|$;
- c** $|-5| + |-10| + |-15| + \dots + |-250|$; **d** $|-1| + |-4| + |-7| + \dots + |-235|$.
- 34** Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:
- a** $|x - 3| = 0$; **b** $|x - 6| = 0$; **c** $|x + 5| = -6$; **d** $|x| \in \{0, 10, 100\}$.
- 35** Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:
- a** $|2x - 6| = 0$; **b** $|3x - 12| = 0$; **c** $|4x + 20| = -6$; **d** $|3x - 27| = 0$.
- 36** Determinați toate numerele întregi x care verifică relația:
- a** $|2x - 9| = 0$; **b** $|3x - 17| = 0$; **c** $|4x + 23| = 0$; **d** $|3x - 20| = 0$.

Probleme de șapte stele



- 37** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $|x| + |y| = 0$.
- Rezolvare:** Deoarece $|x| \geq 0$ și $|y| \geq 0$, rezultă că $|x| + |y| \geq 0$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$, egalitatea având loc dacă și numai dacă $|x| = |y| = 0$, adică $x = y = 0$.
- 38** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
- a** $|x| + |y| + |z| = 0$; **b** $|x - 1| + |y - 2| + |z - 3| = 0$;
- c** $|x - 2| + |y - 3| = 1$; **d** $|x| + |y| + |z| = 2$.
- 39** Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
- a** $|2x - 8| + |5y - 40| = 0$; **b** $|7x - 21| + |2y - 8| = 0$;
- c** $|4x - 12| + |2y - 11| = 0$; **d** $|4x - 12| + |5y - 10| + |3z - 3| = 0$.
- 40** Determinați cardinalul mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ab; a, b \in \mathbb{Z}, |a| \leq 10, |b| \leq 3\}$.
- 41** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $||3x - 18| - 0| = 0$.

I.2 Compararea și ordonarea numerelor întregi

Dintre două numere întregi diferite reprezentate pe o axă a numerelor este mai mare cel care este reprezentat mai la dreapta. În reprezentarea de mai jos, punctelor A și B le corespund numerele întregi a și respectiv b . Deoarece A este situat la stânga lui B , rezultă că $a < b$.



În funcție de semnul numerelor a și b , pot apărea următoarele situații:

- a** $a, b \in \mathbb{Z}_+$: a și b sunt numere naturale; compararea se face după regulile cunoscute.
- b** $a \in \mathbb{Z}_-$ și $b \in \mathbb{Z}_+$: în această situație, punctul A se află pe axă la stânga lui O , iar punctul B se află la dreapta lui O . Evident, este mai mare numărul nenegativ: $b > a$.



- c** $a, b \in \mathbb{Z}_-$: studiind reprezentarea pe axă de mai jos, observăm că punctul A este mai depărtat de origine, deci $OA > OB$. Cum $OA = |a|$ și $OB = |b|$, rezultă că $|a| > |b|$.



Concluzii

- 1 Dintre două numere întregi pozitive, mai mare este cel care are modulul mai mare.
- 2 Orice număr întreg negativ este mai mic decât orice număr natural.
- 3 Dintre două numere întregi negative, mai mare este cel care are modulul mai mic.

Exersare

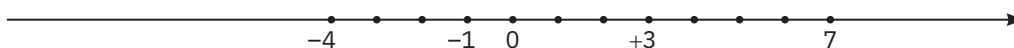


- 1 Stabiliți dacă următoarele inegalități sunt adevărate sau false:

- | | | | |
|------------------------|-----------------------|---------------------------|---------------------------|
| a $-5 < 5$; | b $-2 > -7$; | c $-14 \leq -14$; | d $-1 < -2$; |
| e $6 \geq +9$; | f $-9 < +18$; | g $-3 \geq -13$; | h $-15 \leq -16$. |

- 2 Completați relațiile următoare cu numere din reprezentarea de mai jos:

- | | | | |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a $-1 > \dots$; | b $\dots > 3$; | c $-4 < \dots$; | d $\dots > -1$. |
|-------------------------|------------------------|-------------------------|-------------------------|



- 3 Indicați cel mai mare număr din fiecare pereche:

- | | | | |
|-------------------------|--------------------------|-------------------------|---------------------------|
| a -1 și 2 ; | b 15 și $+14$; | c 0 și -7 ; | d 0 și $+8$; |
| e 11 și -2 ; | f -3 și -5 ; | g -9 și -4 ; | h -25 și -18 . |

- 4 Completați cu unul dintre simbolurile $<$ sau $>$:

- | | | | |
|--------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| a $2 \dots -9$; | b $-6 \dots 5$; | c $0 \dots -1$; | d $+5 \dots -5$; |
| e $-6 \dots -7$; | f $-9 \dots -15$; | g $-12 \dots -21$; | h $+3 \dots +17$. |

- 5 Enumerați numerele întregi negative ce sunt mai mari decât -8 .

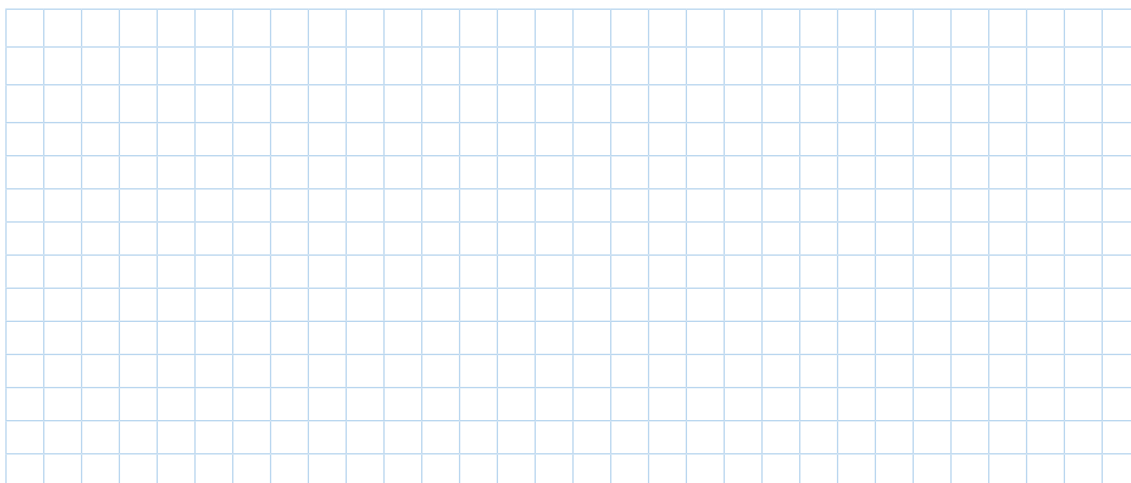
- 6 Scrieți șase numere întregi mai mici decât -10 .
- 7 Enumerați numerele întregi care sunt cuprinse între -12 și -7 .
- 8 Indicați cel mai mic element al fiecărei mulțimi:
- a $A = \{-2, +5, -3, 0\}$; b $B = \{-12, +6, -15, 23\}$; c $C = \{-26, -52, 3, 25\}$.

Consolidare



- 9 Ordonați crescător numerele:
- a $-5, +4, -2, 0$; b $7, -4, -5, 1$; c $-43, +34, -34, 43$.
- 10 Ordonați descrescător numerele $9, -4, -10, +5, 0, -1$.
- 11 Ordonați numerele $12, -16, -1, +5, 15, -6$ de la cel mai mic la cel mai mare. Ordonați apoi numerele de la cel mai apropiat de zero până la cel mai depărtat.
- 12 Numerele întregi negative m și n verifică relația $|m| < |n|$. Dintre m și n , care este cel mai mic număr?
- 13 Completați pentru a obține propoziții adevărate:
- a Cel mai mare număr negativ alcătuit din două cifre diferite este
- b Cel mai mic număr întreg de trei cifre este egal cu
- c Cel mai mic număr întreg mai mare decât -5 este
- d Cel mai mare număr întreg mai mic decât -10 este
- 14 Fie mulțimea $A = \{-2, +4, -6, -(-2), -10, 12, -(+7)\}$.
- a Ordonați crescător elementele mulțimii A .
- b Enumerați elementele mulțimii A care sunt cel puțin egale cu 1 .
- c Determinați mulțimile $A \cap \mathbb{N}$, $A \setminus \mathbb{N}$, $A \setminus \mathbb{Z}$.

Rezolvați problema chiar aici:



- 15 Determinați toate valorile posibile ale numerelor x și y știind că:
- a $|x| = 4$, $|y| = 5$ și $x < y$; b $|x| = 4$, $|y| = 5$ și $x > y$;
- c $|x| = 2$, $|y| = 6$ și $x < y$; d $|x| = 3$, $|y| = 12$ și $x > y$.

- 16** Înlocuiți a și b din relația $a < x < b$ cu numerele întregi cele mai apropiate de x , știind că x este egal cu:
a 6; **b** 42; **c** 0; **d** -1; **e** -8; **f** -38.
- 17** Enumerați elementele mulțimilor următoare:
a $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -3 \text{ și } x < 2\}$; **b** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -6 \text{ și } x < -2\}$;
c $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid -8 < x \text{ și } x < -4\}$; **d** $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 0\}$;
e $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq x < 5\}$; **f** $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 < x < 6\}$.
- 18** Enumerați elementele mulțimilor, în ordine descrescătoare:
a $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| < 5\}$; **b** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq |x| < 5\}$;
c $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| \leq 5\}$; **d** $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 \leq |x| \leq 5\}$.
- 19** Determinați intersecția mulțimilor $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = x\}$.
- 20** Comparați numerele a și b , unde:
a $a = -|-10|$ și $b = |-(10)|$; **b** $a = |-5| + |-2|$ și $b = |+5| - |+2|$.
- 21** Scrieți cinci numere întregi consecutive astfel încât:
a cel mai mare să fie egal cu -4; **b** cel mai mic să fie egal cu -18.
- 22** Dacă $\overline{-275x} < -2758$ și $-87 > \overline{-y7}$, numărul $\overline{xy} - xy$ este egal cu:
a -99 **b** 0 **c** 9 **d** 18.
- 23** Dacă x este un număr întreg cuprins între -3 și 5, care este probabilitatea ca valoarea sa absolută să fie mai mare decât 2?
- 24** Determinați cel mai mic număr întreg de patru cifre distincte, știind că suma cifrelor sale este egală cu 10.
- 25** Câte puncte cu coordonate numere întregi pot fi reprezentate pe axă între punctele $A(-1\,000)$ și $B(+1\,000)$?

Aprofundare



- 26** Determinați numărul natural n , știind că mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < |x| \leq n + 1\}$ are 20 de elemente. Care este cel mai mic element al mulțimii?
- 27** Puneți unul dintre semnele $>$, $<$, $=$, astfel încât următoarele propoziții să fie adevărate:
a $-7 \dots -3$; **b** $-(-5) \dots 5$; **c** $-14 \dots -(4 + 10)$; **d** $20 \dots -(+10)$;
e $0 \dots -25$; **f** $-11 \dots 0$; **g** $|93 - 27| \dots -(-66)$; **h** $0 \dots -(3 - 3)$.
- 28** Determinați numerele x și y știind că numerele întregi -3, -2, x , 0, y , 4 sunt ordonate crescător și $x, y \in \{-3, -1, 2, 5, 7, 9\}$.

Rezolvați problema chiar aici:

- 29** Determinați numerele $x, y \in \{-4, -3, -2, 1, 3, 5\}$ știind că x este negativ, iar y este pozitiv, cu modulul mai mare decât 1. Câte răspunsuri posibile există?
- 30** În tabelul de mai jos s-au înregistrat temperaturile într-o săptămână de iarnă.
- a** În ce zi la ora 13 a fost cel mai frig? Dar cel mai cald?
- b** În ce zi și la ce oră s-a înregistrat temperatura cea mai: **i** mică; **ii** mare?
- c** În ce zi și la ce oră s-a înregistrat temperatura:
- i** -7° ; **ii** a° cu $|a| = 6$; **iii** b° cu $b^{\circ} < -10^{\circ}$; **iv** c° cu $c^{\circ} > 2^{\circ}$?

Ziua	Temperatura la ora		
	7 ⁰⁰	13 ⁰⁰	24 ⁰⁰
Luni	-9°	-5°	-12°
Marti	-7°	-1°	-4°
Miercuri	-2°	3°	-1°
Joi	-1°	6°	-3°
Vineri	-6°	0°	-9°
Sambata	-8°	-3°	-13°
Duminica	-7°	-1°	-15°

Probleme de şapte stele



- 31** Determinați suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2^{100}\}$.
- 32** Comparați numerele $a = |2^{25} - 9^7| + 3^{14}$ și $b = |27^5 - 5^{10}| + 25^5$.

Rezolvare:

$$\left. \begin{aligned} 2^{25} &= 2^{5 \cdot 5} = (2^5)^5 = 32^5 > 27^5 \\ 27^5 &= (3^3)^5 = 3^{15} > 3^{14} = (3^2)^7 = 9^7 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2^{25} > 9^7 \Rightarrow 2^{25} - 9^7 > 0 \Rightarrow |2^{25} - 9^7| = 2^{25} - 9^7 \Rightarrow a = |2^{25} - 9^7| + 3^{14} = 2^{25} - 9^7 + 9^7 = 2^{25}.$$

Continuați rezolvarea chiar aici:

- 33** Se consideră mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2n - 1\}$. Determinați n , știind că mulțimea A are 101 elemente.

I.3 Adunarea numerelor întregi

Să analizăm situația financiară a unei societăți pe parcursul unei săptămâni. Totalitatea încasărilor unei zile constituie *creditul* (reprezentat prin numere pozitive), iar plățile constituie *debitul* (reprezentat prin numere negative). Soldul unei zile se obține însumând creditul și debitul. Cantitățile sunt exprimate în mii de lei.

	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă
Credit	3	2	1	4	1	0
Debit	1	3	0	4	4	2
Soldul zilei	+2	-1	+1	0	-3	-2
Interpretare	$3 + (-1) = 2$	$2 + (-3) = -1$	$1 + 0 = 1$	$4 + (-4) = 0$	$1 + (-4) = -3$	$0 + (-2) = -2$

Mai mult, soldul cumulat al zilelor de vineri și sâmbătă este egal cu -5; deci avem și interpreta-rea $-3 + (-2) = -5$. Analizând rezultatele, tragem următoarele concluzii:

- a** Suma a două numere întregi cu același semn este numărul întreg care are:
- modulul egal cu suma modulelor termenilor;
 - același semn ca termenii sumei.

Exemple: **1** $(+2) + (+5) = +7$; **2** $(+3) + (+8) = +11$; **3** $(+6) + (+8) = +14$;
 4 $(-2) + (-6) = -8$; **5** $(-1) + (-9) = -10$; **6** $(-5) + (-11) = -16$.

- b** Suma a două numere întregi cu semne diferite este numărul întreg care are:
- modulul egal cu modulul diferenței modulelor termenilor;
 - semnul egal cu semnul termenului mai mare în modul.

Exemple: **1** $(-2) + (+5) = +3$; **2** $(+8) + (-3) = +5$; **3** $(+11) + (-8) = +3$;
 4 $(+2) + (-6) = -4$; **5** $(-9) + (+3) = -6$; **6** $(+5) + (-11) = -6$.

- c** Suma a două numere întregi opuse este 0.

Exemple: **1** $(-2) + (+2) = 0$; **2** $(+8) + (-8) = 0$; **3** $(+11) + (-11) = 0$.

Observații

- 1** Suma a două numere întregi pozitive este întotdeauna un întreg pozitiv.
- 2** Suma a două numere întregi negative este întotdeauna un întreg negativ.
- 3** Suma a două numere cu semne diferite poate fi egală cu zero, pozitivă sau negativă.
- 4** Suma a două numere întregi este 0 dacă și numai dacă numerele sunt opuse.

Proprietățile adunării numerelor întregi

1 Adunarea numerelor întregi este *asociativă*.

$$(a + b) + c = a + (b + c), \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

2 Adunarea numerelor întregi este *comutativă*.

$$a + b = b + a, \text{ pentru orice } a, b \in \mathbb{Z}.$$

3 Numărul întreg 0 (zero) este *element neutru* pentru adunare.

$$a + 0 = 0 + a = a, \text{ pentru orice } a \in \mathbb{Z}.$$

În concluzie, folosind proprietățile adunării, putem afirma că suma a trei sau mai multe numere nu se modifică, dacă se introduc paranteze (se asociază termenii) sau dacă schimbăm locul termenilor.

Exersare



1 Rezultatul unei adunări poate fi obținut utilizând axa numerelor astfel:

Pasul 1: marcăm poziția pe axă a primului termen.

Pasul 2: **a** dacă al doilea termen al sumei este pozitiv, numărăm spre dreapta tot atâtea unități câte conține al doilea termen;

b dacă al doilea termen al sumei este negativ, numărăm spre stânga tot atâtea unități câte conține al doilea termen.

Procedați astfel pentru a determina rezultatele adunărilor următoare:

a $-2 + (-5)$;

b $+2 + (-5)$;

c $-3 + (-1)$;

d $-4 + (+7)$;

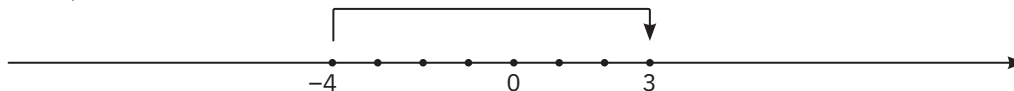
e $-5 + (+5)$;

f $+4 + (-4)$;

g $+6 + (-4)$;

h $+6 + (-4)$.

Rezolvare: d Pentru a efectua $-4 + (+7)$, reprezentăm numărul -4 pe axă, apoi numărăm șapte unități spre dreapta.



2 Putem folosi o axă a numerelor pentru a determina termenul lipsă al unei sume care este cunoscută. Procedați în același mod ca la exercițiul anterior, pentru a determina termenul lipsă al sumelor următoare:

a $-2 + \dots = 2$;

b $4 + \dots = -1$;

c $-5 + \dots = 0$;

d $+3 + \dots = 0$;

e $7 + \dots = -2$;

f $1 + \dots = -5$.

Rezolvare: a Termenul lipsă este $+4$ deoarece din poziția „ -2 ” trebuie să ne deplasăm pe axă cu patru unități spre dreapta. Numărul de unități indică modulul numărului, iar direcția deplasării, semnul acestuia.

3 Efectuați calculele și evidențiați sumele ai căror termeni au același semn:

a $-2 + (+4)$;

b $-2 + (-2)$;

c $+4 + (+8)$;

d $-3 + (-7)$;

e $+10 + (-5)$;

f $0 + (+4)$;

g $6 + (+9)$;

h $+3 + (+2)$.

4 Efectuați calculele și evidențiați sumele ai căror termeni sunt numere opuse:

a $-8 + (+1)$;

b $-5 + (-5)$;

c $+2 + (+11)$;

d $+3 + (-3)$;

e $+10 + (-9)$;

f $-8 + (+8)$;

g $-9 + (+9)$;

h $+7 + (-7)$.

12 Calculați:

a $-25 + |-12| + |-8| + (-10);$

b $+17 + |+6| + |-15| + (-20)$;

c $-4 + |+6 + (-11)| + |-15 + 12| + (-18)$:

d $|1 + (-9)| + |3 + (-15) + 6| + (-8)|$;

e $|+26 + (-15) + (-14)| + |-21 + 12|;$

f $-7 + |-12 + 12| + |-7| + (+14).$

13 Dacă adunăm un număr pozitiv cu un număr negativ obținem rezultat pozitiv sau negativ? Explicați și alcătuiți exemple care să vă susțină afirmațiile.

14 Calculati prin două metode sumele de mai jos, iar apoi comparati rezultatele.

a $(-3) + (+5) + (-9) + (+1)$;

b $(+3) + (-4) + (+2) + (-10)$:

c $(+5) + (-6) + (-8) + (+12)$:

d $(+19) + (+9) + (-12) + (-16)$:

e $(-13) + (-14) + (+12) + (+10)$:

f $(-2) + (+1) + (+1) + (-4)$:

9. $(+3) + (+4) + (-16) + (+2);$

h $(-4) + (+3) + (+7) + (-9)$.

Rezolvare: a Metoda I. Se efectuează calculele în ordinea în care sunt scrise:

$$(-3) + (+5) + (-9) + (+1) = +2 + (-9) + (+1) = -7 + (+1) = -6.$$

Metoda II. Se adună mai întâi numerele ce au același semn, apoi se adună rezultatele obținute:

$$(-3) + (+5) + (-9) + (+1) = [(+5) + (+1)] + [(-3) + (-9)] = (+6) + (-12) = -6.$$

15 Calculati prin două metode sumele de mai jos. Comparati rezultatele.

a $(-3) + (+5) + (+3) + (+2)$;

b $(+6) + (-4) + (-6) + (-10)$;

c $(+8) + (-6) + (+15) + (-8)$;

d $(+9) + (+12) + (-12) + (-16)$;

e $(-9) + (-14) + (+9) + (+10)$;

f $(-23) + (+1) + (+10) + (+23);$

no. $(+3) + 6 + (-16) + (-3);$

h $(-27) + (+5) + (+11) + (+23).$

16 a Știind că $a + b = -48$ și $c = +29$, calculați $a + (b + c)$.

b Stiind că $a = -181$ si $b + c = -238$, calculati $(a + b) + c$.

Rezolvați problema chiar aici:

17 Calculati, folosind eventual proprietățile adunării numerelor întregi:

a $-8 + 85 + 8 + (-16) + 15 + (-84)$:

b $-25 + 31 + (-65) + 49 + 20$;

c $+58 + (-14) + (-66) + 12 + (+30)$;

d $-121 + 99 + (-9) + (-50) + (41)$:

e $+146 + (-247) + 60 + (-146) + (-13)$:

f $-482 + 300 + (-129) + 82 + 229.$

18 Calculați:

a $-28 + (-41) + 18 + (-19) + 19$;

c $400 + (-157) + (+101) + (-43) + 99$;

e $651 + (-289) + 29 + (-11) + 30$;

b $-39 + 104 + 39 + (-24) + (-70)$;

d $-245 + 67 + 13 + (-55) + 120$;

f $-876 + (+148) + 22 + (-14) + 20$.

19 Determinați suma numerelor x și y :

a $x = 3, y = -4$;

b $x = -3, y = -4$;

c $x = 3, y = 4$;

d $x = -3, y = +4$;

e $x = 6, y = -2$;

f $x = 5, y = -1$;

g $x = -9, y = -2$;

h $x = +3, y = +2$;

i $x = +5, y = -2$;

j $x = 14, y = -4$;

k $x = -11, y = +1$;

l $x = 10, y = -10$;

m $x = -8, y = -4$;

n $x = -11, y = +11$;

o $x = 1, y = -2$;

p $x = -2, y = -3$.

20 Calculați $|x + y|$, $|x| + |y|$ și comparați de fiecare dată rezultatele pentru:

a $a = 4, b = 6$;

b $a = 5, b = 6$;

c $a = 2, b = 9$;

d $a = 10, b = 18$;

e $a = -54, b = 7$;

f $a = -4, b = 8$;

g $a = -3, b = 9$;

h $a = -1, b = 12$;

i $a = -19, b = -13$;

j $a = 8, b = -12$;

k $a = -3, b = -2$;

l $a = 7, b = -3$.

Pentru ce numere întregi a și b relația $|a + b| = |a| + |b|$ este corectă?

Există numere întregi a și b pentru care $|a + b| > |a| + |b|$?

21 Completați cu un simbol de inegalitate pentru a obține propoziții adevărate. Fără a efectua calculele, justificați fiecare inegalitate.

a $(-3) + (+7) \dots (+2) + (+7)$;

b $(-11) + (+7) \dots (+6) + (-11)$;

c $(-16) + (+11) \dots (-16) + (+10)$;

d $(-3) + (+12) \dots (-4) + (+12)$;

e $(+24) + (-5) \dots (+2) + (-7)$;

f $(-31) + (+31) \dots (-13) + (31)$.

22 Completați pentru a obține propoziții adevărate:

a $5 + (\dots) = +10$;

b $+2 + (\dots) = +14$;

c $-5 + (\dots) = -10$;

d $-3 + (\dots) = -9$;

e $-12 + (\dots) = -2$;

f $-6 + (\dots) = +4$;

g $-8 + (\dots) = -1$;

h $-7 + (\dots) = 0$;

i $-2 + (\dots) = +8$;

j $7 + (\dots) = -3$;

k $+2 + (\dots) = -6$;

l $-48 + (\dots) = -23$.

23 Completați enunțurile următoare cu numere întregi pentru a obține relații corecte. Scrieți câte patru soluții pentru fiecare subpunct.

a $\dots + (-7) < 23$;

b $+ (+12) \geq -2$;

c $+ (-3) > -5$;

d $\dots + (-4) \leq -11$;

e $20 + () < -2$;

f $128 + () < -5$.

24 Comparați:

a $-14 + 26$ cu $-13 + 22$;

b $+27 + (-42)$ cu $-57 + 29$;

c $-1 + (-18) + 32$ cu $-2 + (-15) + 4$;

d $-54 + 18 + (-16)$ cu $-72 + 102 + 8$;

e $-29 + 50 + (-31)$ cu $-15 + 64 + (-59)$;

f $-108 + 256$ cu $256 + (-107)$.

25 Se consideră numerele întregi $a = -7$, $b = -18$ și $c = 16$. Calculați:

a $[(a + b) + c] + (-a) + (-b)$;

b $[(a + b) + (-a + c)] + [-b + (-c)]$;

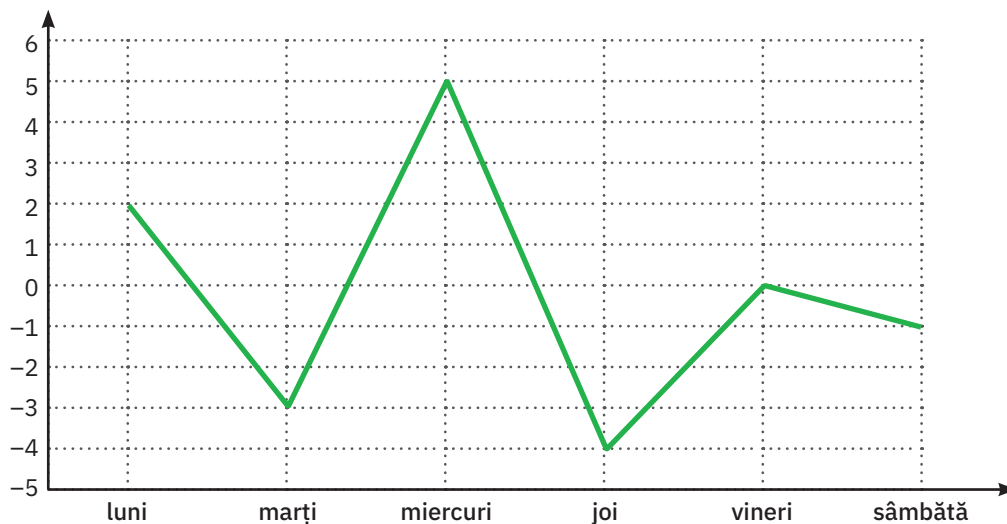
c $[-a + (-b) + c] + [(-a + b) + c]$;

d $[a + (-b) + (-c)] + [a + (-b) + (-c)]$;

e $a + [b + (-c + a) + b] + [c + (-a)]$;

f $b + a + [-c + (-b) + a] + (-a + c)$.

- 26** Un comerciant a reprezentat evoluția soldului societății sale pentru săptămâna 23-28.08.2023 printr-o diagramă. Valorile cuprinse în aceasta sunt exprimate în milioane de lei.



- a** Determinați soldul din fiecare zi a săptămânii.
b Calculați soldul total din săptămâna respectivă, adunând valorile înregistrate de acesta în fiecare zi.
- 27** Completați tabelul de mai jos cu suma de pe linia sau coloana respectivă.

5	-3	+4	-8	
-1	+4	-6	-9	
+5	-3	+7	+7	
-7	+2	-9	-2	

- 28** Iată un joc pentru o oră de matematică. Fiecare dintre elevi va scrie un număr întreg pe caiet. De exemplu, fetele ar putea să scrie numere pozitive, iar băieții numere negative. Profesorul numește doi elevi. Primul spune numărul pe care l-a scris pe caiet, iar cel de-al doilea va calcula în gând suma dintre acesta și numărul pe care el și l-a ales și o va spune colegilor. Aceștia trebuie să ghicească numărul ales de cel de al doilea elev.
- 29** Scrieți numărul -8 ca sumă a două numere:
a negative; **b** de semne contrare.
 Puteți scrie numărul -8 ca sumă a două numere pozitive? Justificați.
- 30** Scrieți numărul $+5$ ca sumă a două numere:
a pozitive; **b** de semne contrare.
 Puteți scrie numărul $+5$ ca suma a două numere negative? Justificați.
- 31** Scrieți numărul 0 ca sumă a două numere întregi nenule. Ce puteți spune despre termenii sumei? Puteți scrie numărul 0 ca sumă a trei numere întregi nenule?
- 32** Dați trei exemple de sume alcătuite din câte doi termeni de semne contrare, astfel încât rezultatul adunării să fie:
a pozitiv; **b** negativ; **c** 0 .



- 33** Calculați suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2010 \leq x < 2013\}$.
- 34** Calculați suma tuturor elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z}_+ \mid -2010 \leq x < 2013\}$.
- 35** Calculați suma elementelor mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z}_- \mid -2010 \leq x < 2013\}$.
- 36** Cu elementele mulțimii $M = \{-5, -4, 0, 3, 9\}$ formați submulțimi alcătuite din câte trei elemente a căror sumă să fie un număr negativ. Câte astfel de submulțimi se pot forma?
- 37** Comparați numerele:
 $a = 1 + 2 + (-3) + (-4) + 5 + 6 + (-7) + (-8) + 9 + 10$ și
 $b = -1 + (-2) + 3 + 4 + (-5) + (-6) + 7 + 8 + (-9) + (-10)$.
- 38** Comparați numerele:
 $a = -1 + 2 - 3 + 4 - \dots - 399 + 400$ și $b = -2 + 4 - 6 + 8 - \dots - 398 + 400$.
- 39** Calculați sumele:
a $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - \dots - 2011 + 2012$;
b $S = +1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 - \dots + 2011 - 2012$;
c $S = -1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 8 - \dots - 2009 + 2010 + 2011 - 2012$;
d $S = -1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 8 - \dots + 99 - 100$.
Indicație: **a** $S = (-1 + 2) + (-3 + 4) + (-5 + 6) + \dots + (-2011 + 2012) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 1006$.
- 40** Calculați sumele:
a $S = +1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots + 101$;
b $S = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - \dots - 201$;
c $S = -1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 8 - \dots + 197$;
d $S = -1 + 2 + 3 - 4 + 5 - 6 - 7 + 8 - \dots - 399$.
- 41** Calculați $S = -1 - 2 + 3 + 4 - 5 - 6 + 7 + 8 - 9 - 10 + \dots$, știind că suma conține 1 998 de termeni. Ce semn are ultimul termen?

Probleme de șapte stele



- 42** Aflați ultima cifră a numărului $a = -1^{100} + 2^{101} + (-3^{102}) + 4^{103} + (-5^{104})$.
- 43** Suma mai multor numere întregi consecutive este egală cu -140 . Numărul termenilor negativi este cu 6 mai mare decât numărul termenilor nenegativi. Câți termeni are suma?
- 44** Se consideră numerele $a_1, a_2, a_3, \dots, a_6 \in \{-1, \pm 1\}$.
a Dacă suma $S = |a_1 + a_2| + |a_3 + a_4| + |a_5 + a_6| = 0$, precizați câte numere sunt pozitive.
b Dacă $S = |a_1 + a_2 + a_3| + |a_4 + a_5 + a_6| = 6$, determinați valorile pe care le poate lua $a_1 + a_2 + \dots + a_6$.
c Arătați că suma $S = |a_1 + a_2 + a_3| + |a_4 + a_5 + a_6|$ nu poate lua decât două valori.

I.4 Scăderea numerelor întregi

Dacă a și b sunt două numere întregi, diferența dintre a și b , notată prin $a - b$, este acel număr întreg c pentru care $a = b + c$. Deci putem scrie relația

$$a = b + c \Leftrightarrow c = a - b, \text{ pentru orice numere întregi } a, b, c.$$

Cum $b + [a + (-b)] = b + a + (-b) = a + [b + (-b)] = a + 0 = a$, rezultă că $c = a + (-b)$. Așadar,

$$a - b = a + (-b).$$

Altfel spus, diferența dintre două numere întregi este egală cu suma dintre primul număr și opusul celui de al doilea.

Exemple: 1 $3 - (+7) = 3 + (-7) = -4$;

3 $8 - 10 = 8 + (-10) = -2$;

2 $-4 - (+5) = -4 + (-5) = -9$;

4 $-1 - (-6) = -1 + (+6) = 5$.

Exersare



- a Determinați numărul cu 5 mai mic decât 12.

b Determinați numărul cu 5 mai mic decât -12.
- Fiecare dintre expresiile numerice următoare este de forma $a - b$. Determinați numerele a și b și stabiliți dacă diferența $a - b$ este pozitivă sau negativă.

a $-4 - (-6)$;	b $-4 - (+7)$;	c $+2 - (-9)$	d $+1 - (-5)$;
e $-21 - (+7)$;	f $0 - (-6)$;	g $+10 - (-8)$;	h $+12 - (+6)$;
i $0 - (+13)$;	j $7 - 10$;	k $-4 - 9$;	l $-2 - 23$.
- Diferența numerelor a și b este egală cu suma dintre numărul a și opusul lui b . Folosind această regulă, scrieți ca sume expresiile numerice următoare și calculați-le:

a $2 - (-9)$;	b $1 - (-8)$;	c $+2 - (-10)$;	d $+14 - (-5)$;
e $-21 - (-7)$;	f $-15 - (-6)$;	g $-10 - (-8)$;	h $0 - (-6)$;
i $2 - (+13)$;	j $7 - (+10)$;	k $-4 - (+9)$;	l $-2 - (+23)$;
m $-2 - (+9)$;	n $-4 - (+9)$;	o $4 - 12$;	p $-7 - 2$.
- Inversând procedeul folosit la adunare, putem utiliza axa numerelor pentru a obține rezultatul unei scăderi astfel:

Pasul 1: marcăm poziția pe axă a primului termen.

Pasul 2: a dacă al doilea termen al sumei este pozitiv, numărăm spre stânga tot atâtea unități câte conține al doilea termen;

b dacă al doilea termen al sumei este negativ, numărăm spre dreapta tot atâtea unități câte conține al doilea termen.

Procedați astfel pentru a determina rezultatele scăderilor următoare:

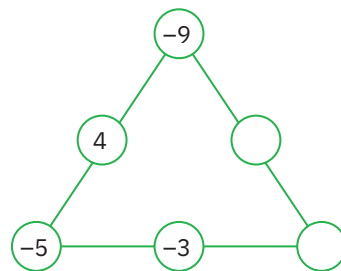
a $-2 - (-6)$;	b $-2 - (-5)$;	c $+3 - (-5)$;	d $-3 - (-7)$;
e $-4 - (+9)$;	f $-5 - (+5)$;	g $+6 - (-1)$;	h $-13 - (-13)$.

d $a = 6, b = 8, c = -11$; **e** $a = -12, b = -14, c = 6$; **f** $a = -11, b = 4, c = -19$;
g $a = 12, b = -27, c = -5$; **h** $a = -6, b = -3, c = -15$; **i** $a = 0, b = -5, c = 25$.

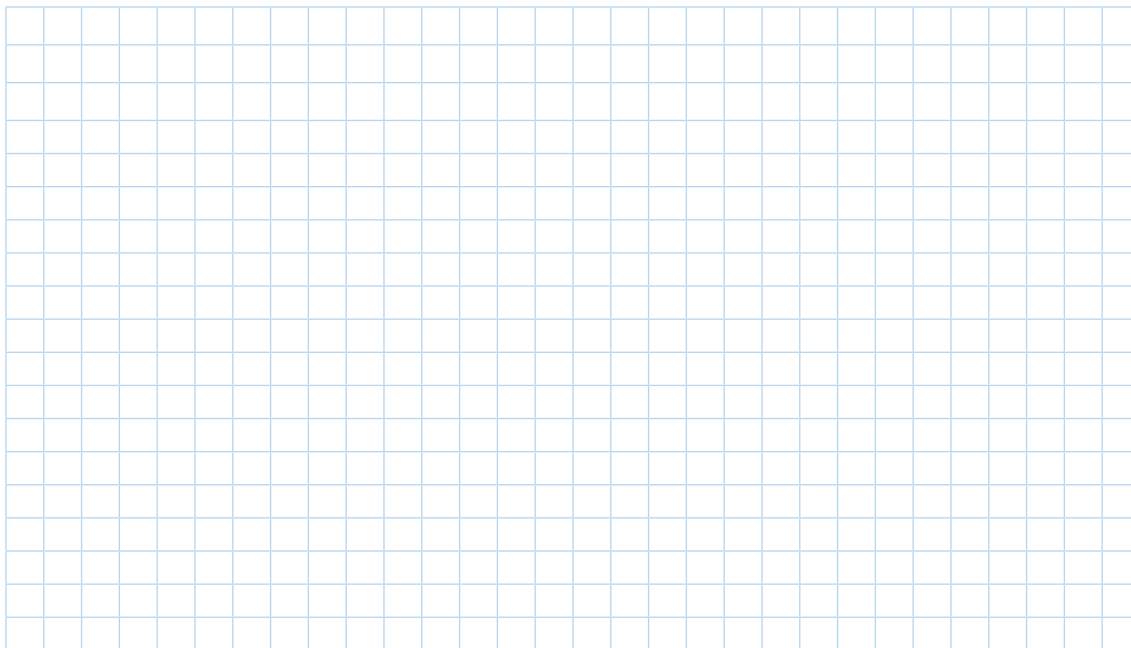
Consolidare



- 12** Dacă scădem două numere pozitive obținem rezultat pozitiv sau negativ? Explicați și alcătuiți exemple care să vă susțină afirmațiile.
- 13** Dacă scădem două numere, unul pozitiv, iar celălalt negativ, obținem un rezultat negativ sau pozitiv? Justificați folosind exemple.
- 14** Stabiliți dacă scăderea numerelor întregi este comutativă. Justificați folosind exemple.
- 15** Suma numerelor de pe fiecare latură a triunghiului alăturat este aceeași. Aflați numerele care lipsesc.
- 16** Determinați următorii cinci termeni ai șirului:
a $-15, -6, 3, 12, \dots$; **b** $18, 11, 4, -3, \dots$; **c** $-12, -7, -2, +3, \dots$.
- 17** Determinați $|a - b|$ și $|b - a|$ în fiecare dintre situațiile următoare:
a $a = 4, b = 7$; **b** $a = 15, b = 9$; **c** $a = -6, b = 8$; **d** $a = 3, b = -2$;
e $a = 8, b = -1$; **f** $a = 12, b = -9$; **g** $a = -15, b = 3$; **h** $a = -11, b = -14$.
 Cum explicați rezultatele obținute?



Rezolvați problema chiar aici:

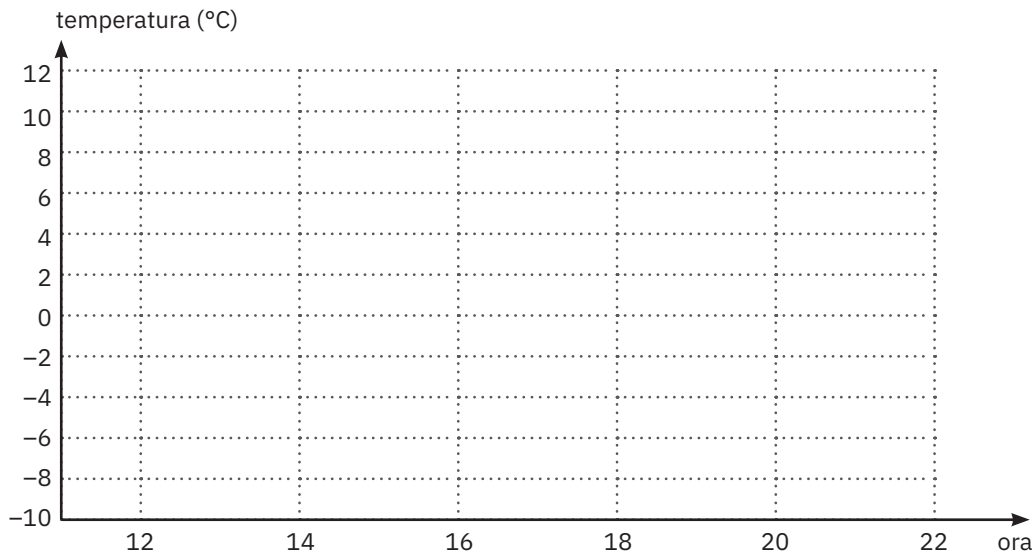


- 18** Completați enunțurile următoare cu numere întregi pentru a obține relații corecte. Scrieți câte patru soluții pentru fiecare subpunct.
- a** $(\dots) - (-7) < 15$; **b** $(\dots) - (+12) \geq -2$; **c** $(\dots) - (-16) > -14$;
d $(\dots) - (-4) \leq -18$; **e** $20 - (\dots) < -21$; **f** $48 - (\dots) < -10$.

- 19** La ora 10 temperatura este de 10°C . Tabelul de mai jos descrie evoluția acesteia în intervalul orar 10-22.

Intervalul orar	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20	20-22
Evoluția temperaturii	scade cu 4°C	rămâne constantă	scade cu 3°C	scade cu 1°C	scade cu 3°C	scade cu 4°C

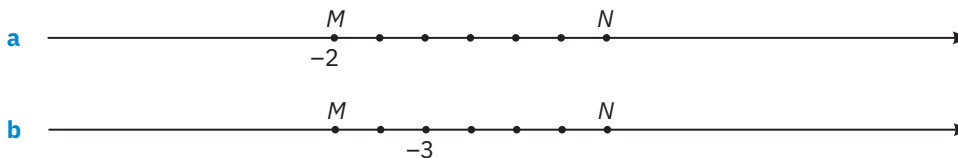
- a** Determinați temperatura la ora 22.
b Pe baza datelor cuprinse în tabel completați reprezentarea de mai jos pentru a obține o diagramă cu bare ce prezintă evoluția temperaturii.



- 20** Reprezentați pe axa numerelor punctele A și B , de abscise a și respectiv b . Comparați lungimea segmentului AB cu $|a - b|$ în fiecare caz:

- a** $a = 3, b = 4$; **b** $a = 6, b = 2$; **c** $a = -1, b = 8$;
d $a = -5, b = -3$; **e** $a = 4, b = -2$; **f** $a = -3, b = -6$.

- 21** Pentru fiecare din reprezentările de mai jos, scrieți o diferență de forma $x - y$ al cărei rezultat să exprime distanța dintre punctele M și N :



- 22** Pe axa numerelor, distanțele de la punctele A și B la punctul O sunt egale cu 8 și respectiv 4 unități.

- a** Determinați abscisele punctelor A și B .
b Calculați diferența absciselor celor două puncte.

- 23** Scrieți numărul 5 ca diferență a două numere întregi negative.

- 24** Scrieți numărul -8 ca diferență a două numere întregi:

- a** pozitive; **b** unul negativ și celălalt pozitiv.

25 Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a $|x - 3| = 5$;

b $|x + 7| = 2$;

c $|x + 9| = -2$;

d $|2x - 17| = 21$;

e $|2x + 3| = 15$;

f $|3x + 7| = 32$;

g $|5x + 9| = 21$;

h $|x - 5| + |y - 8| = 1$.

Indicații: a $x - 3 = -5$ sau $x - 3 = 5$; h $|x - 5| = 1$ și $|y - 8| = 0$ sau $|x - 5| = 0$ și $|y - 8| = 1$.

Aprofundare



26 Calculați:

a $|-12 + 25 - 6| - |54 - 62 + (-23)|$;

b $|45 + (-11) - (-15)| - |2 - (-18) - 6|$;

c $|-75 + 57 - (-24)| + |-15 - 17 - 9|$;

d $|-128 - (-144)| - |-65 + 61 + (-80)|$.

27 Calculați:

a $[-18 - (-15 - 22) - 1] - [-24 - (-45)]$;

b $[+7 - (25 - 68)] + [-14 - (9 + 7)]$;

c $\{-2 - [7 + (-3 - 18) - (-12)] - 20\} - 15$;

d $-17 - \{-16 - [-15 - (-14)] + 13\} - 12$.

28 Calculați:

a $11 + \{-15 + [+5 - 12 + (-8 - 13) - (-5 - 18 - 2)] + 8\}$;

b $[(-7 + 3 - 13) - (4 - 14 - 5) - (+8)] - [10 + (-6) - (-24 + 28) - (-16)]$.

29 Calculați:

a $-1 - 2 - 3 - \dots - 200$;

b $-2 - 4 - 6 - \dots - 324$;

c $-3 - 6 - 9 - \dots - 501$;

d $-1 - 5 - 9 - \dots - 405$.

30 Se consideră șirul de operații $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 9 \pm 10$. Faceți o alegere a semnelor + și - astfel încât șirul operațiilor să conducă la:

a 55;

b 37;

c +5;

d -5;

e -19.

31 Este posibil de găsit o alegere a semnelor + sau - în fața fiecărui termen al membrului stâng, pentru a avea egalitatea $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 35 = 425$?

Ioan Laurențiu Ploscaru, Centrul de Excelență, Râmnicu Vâlcea, 2009

Probleme de șapte stele



32 Suma mai multor numere întregi consecutive este egală cu 270. Numărul termenilor negativi este cu 10 mai mic decât numărul termenilor nenegativi.

a Câți termeni are suma?

b Aflați diferența dintre cel mai mare și cel mai mic termen al sumei.

33 Se consideră mulțimea $A = \{1, -2, 3, -4, \dots, -244, 245\}$.

a Calculați suma elementelor mulțimii A.

b Determinați toate perechile de numere (x, y) , unde $x, y \in A$, cu proprietatea că $x - y = 150$.

c Determinați toate perechile de numere (x, y) , unde $x, y \in A$, $x < y$, cu proprietatea că $|x| + |y| = 451$.

34 Arătați că nu există numere întregi a și b care verifică egalitatea:

$$|3a + 5b| - |7a - 9b| = 2019.$$

Marius Gavrilăscu, Centrul de Excelență, Râmnicu Vâlcea, 2008

Testul 1

(1p) 1 Calculați:

a $-13 + (-2 - 3);$

b $(-4 + 7) - (-2 - 3) + (-6 + 1).$

(1p) 2 Ordonăți numerele întregi: $-5, -8, +7, +4, -6, 0, -10.$

(2p) 3 Calculați:

a $(-6 - 4) - (-10 + 8) + (-2 + 9);$

b $[-6 - (-9 + 2) + (-5 + 8)] - [-2 + 6 - (-6 + 8)].$

(2p) 4 Calculați numerele $a = (-8 + 5) - (-6 + 2)$ și $b = -16 + 13 - (-2 + 1)$ și apoi scrieți:

a opusul numărului a ;

b modulul numărului $a + b.$

(1p) 5 Efectuați: $[-7 + (-4 + 11)] \cdot [5 - (6 + 7)].$

(1p) 6 a Comparați numerele a și b , unde $a = |3 - 5|$ și $b = -(8 - 1) + 2^3.$

b Știind că $ab + ac - 8 = 32$ și $b + c = 10$, calculați $a - (b + c).$

(1p) 7 Determinați numărul întreg x , știind că $2^{2-x} = 16.$

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

(1p) 1 Calculați:

a $|-20 + 12|;$

b $-8 - (-6 + 10);$

c $-18 + (-6 + 1).$

(1p) 2 Comparați numerele m și n , știind că $m = -12 - 6$ și $n = -1 - 2 - 3 - 4 - 5.$

(2p) 3 Scrieți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:

a $-6 \in \mathbb{N};$

b $-7 > -5;$

c $4 \in \mathbb{Z};$

d $-|-2 - 4| = 6.$

(1p) 4 a Scrieți numărul -3 ca sumă de două numere întregi negative.

b Scrieți numărul -3 ca diferență de două numere întregi negative.

(1p) 5 Calculați: $-18 - 2 - \{15 - 4 - [10 - (8 - 5) + (-3 + 9)]\}.$

(1p) 6 Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 4 \text{ sau } |x| = 9\}.$

(2p) 7 Calculați:

a $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + 21 - 22;$

b $1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + 12 + \dots + 61 - 62 - 63 + 64.$

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

(1p) 1 Calculați:

a $-18 - (-2 + 10)$;

b $||-2 + 7| - |-8 + 3|| - |-6 + 9|$.

(1p) 2 Adunați opusul lui -12 cu opusul lui $+19$. Ce rezultat obțineți?

(2p) 3 Știind că $ax - ay - 4 = 96$ și $x - y = 25$, calculați $a - (x - y - 5)$.

(1p) 4 Rezolvați ecuațiile:

a $9x - 3 = 27 - x$;

b $|x - 7| = 18$;

c $|3x - 8| = -22$.

(1p) 5 Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| = 10 \text{ și } |x| = 3\}$.

(1p) 6 Calculați $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - \dots - 41$.

(2p) 7 Fie două numere întregi x și y , astfel încât $x < 0 < y < 17$. Determinați numerele a și b , știind că: $a = |x - 3| - |8 - x|$ și $b = |x - y| + |y - 20| - |x - 5|$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

(1p) 1 a Scrieți patru numere negative mai mari ca -5 .

b Care este cel mai mare număr întreg mai mic decât -20 ?

c Care este cel mai mic număr întreg mai mare decât -2013 ?

(1p) 2 a Dați 3 exemple de numere întregi pare cuprinse între -6 și 3 .

b Calculați $-60 - (-12 + 10) + (-6 + 3)$.

(1p) 3 Dacă $x < -2$, calculați $|10 - x| - |x - 4|$.

(1p) 4 Produsul a cinci numere întregi consecutive este egal cu zero. Care poate fi valoarea maximă a sumei celor cinci numere? Dar valoarea minimă?

(2p) 5 Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi ecuația: $|2x - 6| + |5x - 15| = 56$.

(1p) 6 Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi inecuația: $|x - 6| < 3$.

(2p) 7 Determinați mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 \geq -1 \text{ și } |x + 2| < 4\}$.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.



Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele:

Clasa a VI-a:

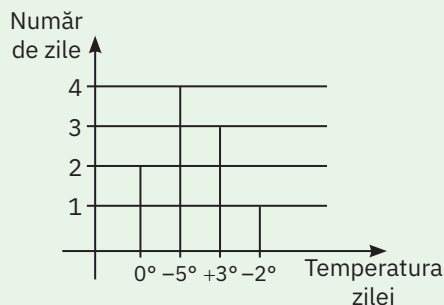
A1

Tema I.1. Număr întreg. Opusul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi. Adunarea și scăderea numerelor întregi

(1,5p) 1 Completați spațiile libere, astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

- a** Opusul numărului întreg 7 este egal cu
- b** Numărul cu 5 mai mare decât -2 este egal cu
- c** Numărul cu 5 mai mic decât -2 este egal cu

(1,5p) 2 Graficul alăturat prezintă temperatura medie zilnică într-o perioadă de timp, exprimată în grade Celsius. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera **A**. În caz contrar, încercuiți litera **F**.



Conform graficului:

- a** În cinci zile, temperatura medie a fost cel puțin 1° . **A** **F**
- b** În cinci zile, temperatura medie a avut valori negative. **A** **F**
- c** În cinci zile, temperatura medie a avut valori nenegative. **A** **F**

(2p) 3 Asociați fiecare sumă din coloana **A** cu rezultatul din coloana **B**.

A	B
a $-8 + 13$	1 -5
b $-8 - 13$	2 -10
c $+8 - 13$	3 -6
d $-8 + (-2)$	4 -21
e $-(-8) + (-17)$	5 -9
	6 $+5$

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4 i Calculați:

a $(-6 - 1) - (-8 + 17)$;

b $|-4 - 3| + |-8 + 7|$.

ii Determinați numerele întregi cu proprietățile:

a $|x + 7| = 4$;

b $x - 5 \geq -7$.

(2p) 5 Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2012 \leq x \leq 2013\}$.

a Stabiliți cardinalul mulțimii A .

b Calculați suma elementelor din A .

c Arătați că suma modulelor elementelor din A este pătrat perfect.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 de minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

